TD-Transformée de Laplace

introduction

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ localement intégrable et bornée. On définit

$$L(f)(x) = \int_0^\infty f(t)e{-}xtdt.$$

1. Montrer que $L(f)(x)$ est bien définie pour x dans $]0, +\infty[$.
2. Montrer que $L(f)$ est continnue. Puis C^∞ et que ses dérivées sont données par
$$L(f)^{(n)}(x) = \int_0^\infty f(t)(-t)^n e{-}xtdt.$$
3. On suppose que f est dérivable et que f' est localement intégrable et bornée. On suppose de plus que f admet une limite à droite en 0 : $f(0+)$. Montrer que
$$L(f')(x) = xL(f)(x) - f(0+).$$

Exemples

Calculer les transformées de Laplace de

1. $f = 1$
2. $f = \cos(bt)$ pour b dans $\mathbb{R}$.
3. $f = \exp(-\lambda t)$ pour $\lambda > 0$.

Abscisse de convergence

On suppose maintenant uniquement que f est localement intégrable sur $[0, +\infty[$.

1. Soit x tel que $t \mapsto |f(t)\exp(-xt)|$ soit intégrable. Montrer que pour tout $x' > x$, $t \mapsto |f(t)\exp(-x't)|$ est intégrable.
2. Supposons qu'il existe x_1 tel que $t \mapsto |f(t)\exp(-x_1 t)|$ soit intégrable. Montrer qu'il existe x_0 (que l'on appellera *abscisse de convergence* de f) tel que pour tout $x > x_0$, $t \mapsto |f(t)\exp(-xt)|$ soit intégrable.
3. Supposons que f est de *croissance au plus exponentielle*, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que
$$|f(t)| = O_{t\to\infty}(\exp(kt).$$
Montrer qu'alors l'abscisse de convergence de f vérifie $x_0 \leq k$.

Autres formules

Montrer les formules suivantes

1. Dilatation : $L(f(a\cdot))(x) = \frac{1}{a}L(f)(\frac{x}{a})$.
2. Translation : $L(f(\cdot - h))(x) = e^{-hx}L(f)(x)$.
3. Déphasage : $L(e^{h\cdot}f(\cdot))(x) = L(f)(x - h)$.

Systèmes différentiels

Résoudre les équations différentielles ordinaires suivantes :

1. $y'' + 3y' + 2y = e^{-t}$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$
2. $y'' + 4y' + 4y = t^4 e^{-2t}$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$
3. $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^{-t}(3t + 4)$ avec $y(0) = -1$ et $y'(0) = -2$.