Corrigé du DM 1

Exercice 1 : 1) On a $u_{n+1} - u_n = 6\sqrt{u_n} > 0$, donc (u_n) est strictement croissante.
Supposons que (u_n) converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$. En passant à la limite, on a

$$\ell = \ell + 6\sqrt{\ell}$$

et donc $\ell = 0$. Or $u_0 = 1 > 0$, et (u_n) est croissante, donc ne peut pas converger vers 0. Donc (u_n) ne peut pas converger vers une limite finie. Comme c'est une suite croissante, on en déduit alors que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

2) On a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} \\
&= \sqrt{u_n + 6\sqrt{u_n}} - \sqrt{u_n} \\
&= \sqrt{u_n}\left(\sqrt{1 + \frac{6}{\sqrt{u_n}}} - 1\right) \\
&= \sqrt{u_n}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{u_n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{u_n}}\right) - 1\right) \\
&= 3 + o(1)
\end{aligned}$$

On a donc

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3.$$

3) On a

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} - v_k.$$

D'après le théorème de Césaro, comme $v_{n+1} - v_n \longrightarrow 3$, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} - v_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3.$$

En conséquence, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} - v_k \sim 3n$$

et donc

$$v_n \sim 3n.$$

4) On a $u_n = v_n^2 \sim 9n^2$.

Exercice 2

a) En utilisant les propriétés du logarithme, puis le fait que $\ln(1+x) = x + o(x)$ pour $x \to 0$, nous obtenons

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n + \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)} = \frac{(-1)^n}{\ln n + \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{(-1)^n}{\ln n\left(1 + \frac{(-1)^n}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)}.$$

Nous utilisons maintenant que $(1+x)^{-1} = 1 - x + o(x)$ pour $x \to 0$:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\ln n} - \frac{1}{n\ln^2 n} + o\left(\frac{1}{n\ln^2 n}\right).$$

Le premier terme est le terme général d'une série convergente (séries alternées). Le deuxième terme est le terme général d'une série absolument convergente (série de Bertrand), et il en est de même pour le troisième terme (comparaison). Donc, la série $\sum u_n$ converge.

b) Nous utilisons ici que $\ln(1+x) = x + x^2/2 + o(x^2)$ et que $\exp(1+x) = e(1+x+o(x))$ pour $x \to 0$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)$$
$$= \exp\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = e + \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc $v_n \sim -\frac{e}{2n}$, et par équivalence de séries de signe constant, la série $\sum v_n$ diverge.

c) Puisque $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + o(x)$ pour $x \to 0$, nous avons

$$\sqrt{n^2+1} - n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1\right) = n\left(\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

En écrivant une formule de Taylor à l'ordre deux, nous obtenons que $\sin(\pi k + x) = (-1)^k x + o(x^2)$, pour $x \to 0$ et pour tout entier k. Donc,

$$w_n = \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n \pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Le premier terme est le terme général d'une série alternée convergente, et le deuxième terme est le terme général d'une série absolument convergente (par comparaison avec $\sum_n 1/n^2$). Donc, $\sum_n w_n$ converge.

d) Nous appliquons la formule de Taylor, centrée en $x = 0$ et à l'ordre deux, à la fonction f : cela donne $f(x) = 2x^2 + o(x^2)$ pour $x \to 0$. Par conséquent, $t_n = 2/n^2 + o(1/n^2) \sim 2/n^2$ est le terme général d'une série convergente.

Exercice 3

1) Le fait que le produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge implique, par définition, que la suite $(P_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \in]0, +\infty[$. Alors

$$u_N = \frac{P_N}{P_{N-1}} \longrightarrow \frac{l}{l} = 1 \qquad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

2) Supposons que le produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, c'est-à-dire, $P_N \to l \in]0, +\infty[$. Par les propriétés du logarithme,

$$\sum_{n=0}^{N} \ln u_n = \ln\left(\prod_{n=0}^{N} u_n\right) = \ln P_N$$

et d'autre part, par continuité de la fonction logarithme, $\ln P_N \to \ln l \in \mathbb{R}$. Nous en déduisons que la série $\sum \ln u_n$ converge.

Réciproquement, si la série de terme général $\ln u_n$ converge vers un nombre réel l', par le même argument nous déduisons que $(\ln P_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers l'. Alors, par continuité de la fonction exponentielle, $P_N \to \exp(l')$.

3) Par le résultat du point précédent, $\prod_{n\in\mathbb{N}}(1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln(1+u_n)$ converge. Puisque $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, celle-ci est une série à termes positifs. Nous pouvons supposer $u_n \to 0$ car, au cas contraire, ni la série des $\ln(1+u_n)$ ni celle des u_n convergent, et il n'y a plus rien à prouver. Or, si $u_n \to 0$ alors $\ln(1+u_n) \sim u_n$, donc la série de terme general $\ln(1+u_n)$ converge si et seelement si celle de terme général u_n converge.

4) Prenons $u_n = 1/n$, pour $n \geq 1$. On obtient alors une expression téléscopique pour le produit partiel à N termes :

$$P_N = \prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \prod_{n=1}^{N}\frac{n+1}{n} = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{N}{N-1}\cdot\frac{N+1}{N} = N+1,$$

donc $P_N \to +\infty$ et le produit infini diverge. Par le résultat du point précédent, cela implique que la série de terme général $1/n$ diverge aussi.

5) Grâce au point 2), il suffit de montrer que la série de $\ln(1+u_n)$ converge. Puisque la série de u_n converge, on a $u_n \to 0$. Alors, par developpement limité du logarithme à l'ordre deux, nous pouvons écrire

$$\ln(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2).$$

Par hypothèse, tous les termes au membre de droite sont les termes généraux de séries convergentes. Donc, la série de $\ln(1+u_n)$ converge.

6) Non, le résultat n'est plus vrai sous ces hypothèses affaiblies. Par exemple, considerons la suite $u_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ pour $n \geq 2$. Nous avons que $u_n > -1$ pour $n \geq 2$; la série des u_n converge ; mais

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Or, le premier terme à droite est le terme général d'une série alternée convergente. La somme des autres termes est équivalente à $1/2n$, et donc la série associée diverge. Par conséquent, la série de $\ln(1+u_n)$ diverge, et le produit $\prod_{n\in\mathbb{N}}(1+u_n)$ diverge aussi, grâce à 2).

Exercice 4 :

1) Comme σ est une bijection,

$$\text{Card}\,\{\sigma(k),\;\; k \in \{n+1,..,3n\}\} = \text{Card}\{n+1,..,3n\} = 2n.$$

Or $\{\sigma(k),\;\; k \in \{n+1,..,3n\}\}$ est la reunion des deux ensembles disjoints $\{\sigma(k),\;\; k \in \{n+1,..,3n\}$ et $\sigma(k) < n\}$ et $\{\sigma(k),\;\; k \in \{n+1,..,3n\}$ et $\sigma(k) \geq n\}$. De plus, comme σ est surjective,

$$\text{Card}\,\{\sigma(k),\;\; k \in \{n+1,..,3n\} \text{ et } \sigma(k) < n\} \leq \text{Card}\{1,..,n-1\} = n-1.$$

On a donc

$$\begin{aligned}&\text{Card}\,\{\sigma(k),\;\; k \in \{n+1,..,3n\} \text{ et } \sigma(k) \geq n\}\\ &\quad = \text{Card}\,\{\sigma(k),\;\; k \in \{n+1,..,3n\}\} - \text{Card}\,\{\sigma(k),\;\; k \in \{n+1,..,3n\} \text{ et } \sigma(k) < n\}\\ &\quad \geq 2n-(n-1)\\ &\quad \geq n. \end{aligned} \tag{1}$$

2)Comme les $\frac{\sigma(k)}{k^2}$ sont positifs, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{3n}\frac{\sigma(k)}{k^2} &\geq \sum_{k\in\{n+1,..,3n\},\sigma(k)\geq n}\frac{\sigma(k)}{k^2}\\ &\geq \sum_{k\in\{n+1,..,3n\},\sigma(k)\geq n}\frac{\sigma(k)}{(3n)^2}\\ &\geq \frac{n}{9n^2}\times \text{Card}\,\{\sigma(k),\;\; k \in \{n+1,..,3n\} \text{ et } \sigma(k) \geq n\}\\ &\geq \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

3)Raisonnons par l'absurde, et supposons que (u_n) est une suite de Cauchy. Alors

$$u_{3n} - u_n \longrightarrow 0.$$

Or

$$u_{3n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{1}{9}.$$

On a donc une contradiction. Donc (u_n) ne peut pas être une suite de Cauchy.
4) (u_n) n'est pas une suite de Cauchy, donc elle ne converge pas vers un réel fini. Comme c'est une suite croissante (on ne fait qu'ajouter des terms positifs), on en déduit que

$$u_n \longrightarrow +\infty.$$

La série $\sum \frac{\sigma(k)}{k^2}$ est donc divergente, quelque soit la bijection σ.