Correction DM 2

Exercice 1

1) f est continue par théorèmes d'opérations donc localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Pour $X \geqslant 0$, notons $F(X) = \displaystyle\int_0^X e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

F est croissante. Pour $x \geqslant 1$, on a $e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$. Donc pour tout $X \geqslant 1$:

$$F(X) \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^X e^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + 1 - e^{-X} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + 1.$$

F étant croissante et majorée, elle converge en $+\infty$. Autrement dit, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2) a) $a_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ et $a_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x = 1$.

b) La fonction $x \longmapsto \cos^{n+1} x$ est continue, positive sans être la fonction nulle sur $[0, \pi/2]$ donc $a_{n+1} > 0$. De façon similaire, la fonction $x \longmapsto \cos^n x - \cos^{n+1} x = (\cos^n x)(1 - \cos x)$ est aussi continue, positive, sans être la fonction nulle sur $[0, \pi/2]$. On a donc $a_n > a_{n+1}$.

c) On a :

$$a_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x)\cos^{n-2} x\,\mathrm{d}x = a_{n-2} - \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^{n-2} x\,\mathrm{d}x.$$

donc :

$$a_n = a_{n-2} + \left[\frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1}\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{n-1}\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x = a_{n-2} - \frac{a_n}{n-1},$$

d'où la relation $a_n = \dfrac{n-1}{n} a_{n-2}$.

d) On procède par récurrence sur $n \geqslant 1$. Pour $n = 1$, on a $n a_n a_{n-1} = 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$. On suppose maintenant la relation établie au rang $n \geqslant 1$. On a alors $(n+1)a_{n+1}a_n = n a_{n-1} a_n = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui termine la récurrence.

e) $a_{n+1} < a_n < a_{n-1}$ donne $\dfrac{n}{n+1} a_{n-1} < a_n < a_{n-1}$, puis $\frac{n}{n+1} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$. Par le théorème des gendarmes, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n_1}} = 1$.

f) La question précédente peut se traduire par $a_{n-1} \sim a_n$ et la relation $n a_n a_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ conduit à $n a_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$. D'où $a_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. En particulier, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3) h est dérivable $]-1, +\infty[$ et pour $x \in]-1, +\infty[$, $h'(x) = \frac{x}{1+x}$. Ainsi, h est décroissante sur $]-1, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. Donc pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $h(x) \geqslant 0$, ce qui revient à dire $\ln(1+x) \leqslant x$.

4) a) L'application $X \longmapsto \displaystyle\int_0^X \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x$ est croissante car la fonction intégrée est positive. Le changement de variable indiqué donne :

$$\int_0^X \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x = \int_0^{\arctan(X/\sqrt{n})} \frac{\mathrm{d}t}{(1 + \tan^2 t)^{n-1}} \leqslant \int_0^{\arctan(X/\sqrt{n})} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

L'application $X \longmapsto \displaystyle\int_0^X \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x$ étant croissante et majorée, la fonction intégrée est intégrable sur $]0, +\infty[$.

b) Soit $x \in [0, \sqrt{n}[$.

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - x^2/n\right)\right) \leqslant \exp\left(n(-x^2/n)\right) = e^{-x^2},$$

où on a pu utiliser l'inégalité obtenue à la question 3 car $-x^2/n \in]-1, 0]$. En intégrant en 0 et $\sqrt{n}$, on obtient

$$b_n \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

De façon similaire, on a, pour $x \in [0, \sqrt{n}]$,

$$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n \ln(1 + x^2/2)\right) \geqslant e^{-x^2}.$$

Et en intégrant :

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x.$$

c) En faisait le changement de variable $x = \sqrt{n}\sin t$,

$$b_n = \int_0^{\pi/2} \sqrt{n}(\cos t)(1-\sin^2 t)^n = \sqrt{n}a_{2n+1}.$$

En faisait le changement de variable $x = \sqrt{n}\tan t$,

$$c_n = \int_0^{\pi/2} \sqrt{n}(1+\tan^2 t)\frac{\mathrm{d}t}{(1+\tan^2 t)^n} = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{(1+\tan^2 t)^{n-1}} = \sqrt{n}a_{2n-2}.$$

d) On a

$$b_n = \sqrt{n}a_{2n+1} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad c_n = \sqrt{n}a_{2n-2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \text{et} \quad \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

L'encadrement de la question 4b) nous permet donc de conclure que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 2

Commençons par remarquer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$. De plus, en 0 on a : $\dfrac{\sin(x)}{x} \sim \dfrac{x}{x} \sim 1$. Ceci montre que cette fonction admet un prolongement par continuité en 1. Ainsi, elle est localement intégrable sur $]0,+\infty[$.

1) a) Soit $n \geqslant 0$. Effectuons le changement de variable $t = x - n\pi$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}dx &= \int_0^{\pi} \frac{|\sin(t+n\pi)|}{t+n\pi}dt \\ &= \int_0^{\pi} \frac{|\sin(t)|}{t+n\pi}dt \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t+n\pi}dt \\ &\geqslant \frac{1}{\pi+n\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)dt \\ &\geqslant \frac{2}{(n+1)\pi}\end{aligned}$$

b) Pour tout $N \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{(N+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}dx &= \sum_{n=0}^{N} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}dx \\ &= \sum_{n=0}^{N} u_n \\ &\geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Puisque la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1}$ est divergente, on en déduit que

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^{(N+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}dx = +\infty.$$

Ceci montre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x}dx$ est divergente.

c) Nous avons déjà vu que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx$ existe. Soit $X \geqslant 1$. Par intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}\int_1^X \frac{\sin(x)}{x}dx &= \left[\frac{-\cos(x)}{x}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos(x)}{x^2}dx \\ &= \cos(1) - \frac{\cos(X)}{X} - \int_1^X \frac{\cos(x)}{x^2}dx\end{aligned}$$

Puisque en $+\infty$, $\dfrac{\cos(x)}{x^2} = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et que la fonction positive $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, par comparaison, on en déduit que la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{x^2}$ est aussi intégrable sur $[1, +\infty[$. De plus, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\cos(X)}{X} = 0$, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$ converge.

2) Comme précédemment, commençons par vérifier que ces intégrales sont bien définies. On a déjà vu précédemment que K_n est bien définie. Pour J_n ce sont les mêmes arguments. La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}$ définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ est continue et on a un équivalent en 0 : $\dfrac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} \sim \dfrac{(2n+1)x}{x} \sim (2n+1)$. Ainsi, J_n est bien définie pour tout $n \geqslant 0$.

a) On a $J_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sin(x)}dx = \frac{\pi}{2}$. Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $J_n = \dfrac{\pi}{2}$. On a alors

$$\begin{aligned}J_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x + 2x)}{\sin(x)}dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)\cos(2x) + \cos((2n+1)x)\sin(2x)}{\sin(x)}dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1))(1-2\sin(x)^2) + 2\cos((2n+1)x)\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)}dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} - 2\sin(x)\sin((2n+1)x) + 2\cos(x)\cos((2n+1)x)dx \\ &= J_n + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+1)x + x)dx \\ &= J_n + 2\left[\frac{\sin((2(n+1)x)}{2(n+1)}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 0$, $J_n = \dfrac{\pi}{2}$

b) Pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - \sin(x)}{x\sin(x)}$. En 0, on a donc : $\dfrac{x - \sin(x)}{x\sin(x)} \sim \dfrac{\frac{x^3}{6}}{x \cdot x} \sim \dfrac{x}{6}$. Ceci prouve en particulier que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$ continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, admet un prolongement par continuité en 0, car sa limite en 0 est 0. Elle est en particulier bornée sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$: il existe donc un réel $M > 0$, tel que pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\left|\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}\right| \leqslant M$. Pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned}|J_n - K_n| &\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin((2n+1)x)| \cdot \left|\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right| dx \\ &\leqslant M \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)x)dx \\ &\leqslant \frac{M}{2n+1}\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(J_n - K_n) = 0$

c) Soit $n \geqslant 0$. Effectuons le changement de variable $u = (2n+1)t$ dans l'expression de K_n :

$$\begin{aligned} K_n &= \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{\frac{u}{(2n+1)}} \frac{du}{(2n+1)} \\ &= \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{u} du \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on sait que la limite de (K_n) est $\frac{\pi}{2}$. De plus, puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ est convergente, la limite de (K_n) est aussi la valeur de cette intégrale. D'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$