2M460 — Année 2014-2015

Correction du partiel du 30 octobre 2014

Exercice 1 :

1) $\text{Ln}\left(nsin(\frac{1}{n})\right) = \text{Ln}\left(1 - \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{n^2}\epsilon(\frac{1}{n})\right) \sim -\frac{1}{6n^2}$. On a faire à des séries de signe constant. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum U_n$ converge.

2)

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left[1 - \frac{(-1)^n}{2n} + \frac{(-1)^n}{n}\epsilon\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\right] \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n\sqrt{n}} + \frac{1}{n\sqrt{n}}\epsilon\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \end{aligned}$$

La série considérée converge comme somme des deux séries convergentes suivantes :
- $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
- $-\frac{1}{2n\sqrt{n}} + \frac{1}{n\sqrt{n}}\epsilon\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ (négative à partir d'un certain rang et équivalente à $-\frac{1}{2n\sqrt{n}}$).

3) Soit $h > 0$. On a $Ln(1+h)+\alpha sin(h) = (1+\alpha)h - \frac{h^2}{2} + h^2\epsilon(h)$ est, pour h suffisamment petit, du signe de $(1+\alpha)h$ si $\alpha \neq -1$ et du signe de $-\frac{h^2}{2}$ si $\alpha = -1$.

En particulier $\text{Ln}(1+\frac{1}{n}) + \alpha \sin\left(\frac{1}{n}\right) = (1+\alpha)\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\epsilon(\frac{1}{n})$.

Premier cas : $\alpha \neq -1$. Alors le terme général de la série est équivalent à $(1+\alpha)\frac{1}{n}$, la série (dont les termes sont de signe constant à partir d'un certain rang) diverge.

Deuxième cas : $\alpha = -1$. Alors le terme général de la série est équivalent à $-\frac{1}{2n^2}$, la série (dont les termes sont négatifs à partir d'un certain rang) converge.

Exercice 2

a) La fonction considérée est dérivable de dérivée $\frac{1-\text{Ln}(t)}{t^2}$. Elle est donc décroissante sur $[e, +\infty[$.

b) D'après le critère des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n \text{Ln}(n)}{n}$ converge.

Comme $\frac{\text{Ln}(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$, la série $\sum \frac{\text{Ln}(n)}{n}$ diverge (critère de comparaison pour des séries positives).

c) De la décroissance de f, on déduit, pour $N \geq 4$, $s_N - \frac{\text{Ln}(3)}{3} \leq \int_3^N f(t)dt \leq s_{N-1}$ et donc s_N est équivalent à $\int_3^N f(t)dt = \frac{\text{Ln}(N)^2}{2} - \frac{\text{Ln}(3)^2}{2}$, lui-même équivalent à $\frac{\text{Ln}(N)^2}{2}$. Donc s_N équivalent à $\frac{\text{Ln}(N)^2}{2}$.

Exercice 3 :

1 et 2) La fonction F est définie sur $\mathbb{R}$ car f est continue. Comme $\dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} > 0$, elle est strictement positive si $x > 0$, strictement négative si $x < 0$, nulle si $x = 0$.

3) Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : pour tout réel x, on a $H(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$. Comme f est continue, H est dérivable. La fonction F s'exprime de façon simple en fonction de H : $F(x) = H(2x) - H(x)$. On en déduit que F est dérivable et $F'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+16x^4}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$

4) On a $F(x) = F(\dfrac{1}{2x})$.

5) Comme F est dérivable en 0, on a (par la formule de Taylor Young) $F(x) = xF'(0) + x\epsilon(x) = x + x\epsilon(x)$. Au voisinage de $+\infty$, on a $F(x) = F(\frac{1}{2x}) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}\epsilon(\frac{1}{2x})$. Donc $F(x)$ est équivalent à $\frac{1}{2x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

6) La fonction F est positive sur $\mathbb{R}_+$, on peut utiliser les critères de comparaison. L'intégrale $\int_0^x F(t)dt$ est divergente.

Exercice 4 :

1) La fonction $\mathrm{Ln}(1 + \frac{1}{t^2})$ est positive et équivalente à $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$. Par comparaison avec une intégrale de Riemann, elle est convergente.

La fonction $u(t) = \ln(1 + \frac{1}{t^2})$ est de classe C^1 et sa dérivée est $u'(t) = -\dfrac{2}{t^3+t}$. La fonction $v(t) = t$ est de classe $\mathcal{C}^1$. On peut faire une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^x \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}dt\right) &= x\mathrm{Ln}\left(1+\tfrac{1}{x^2}\right) - \mathrm{Ln}(2) + 2\int_1^x \frac{1}{1+t^2} \\ &= x\mathrm{Ln}\left(1+\tfrac{1}{x^2}\right) - \mathrm{Ln}(2) + 2Artg(x) - \tfrac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, le terme de droite tend vers $-\mathrm{Ln}(2)+\frac{\pi}{2}$. On a donc $\int_1^\infty \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) = -\mathrm{Ln}(2) + \frac{\pi}{2}$.

2) Il y a un problème de convergence en 0 et en $+\infty$.

Au voisinage de $+\infty$, la fonction $\dfrac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\mathrm{Ln}(1+x)}$ est positive et équivalente à $\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}\mathrm{Ln}(1+x)} = o\left(\dfrac{1}{x^\gamma}\right)$ our $\gamma \in]1, \frac{3}{2}]$. On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\mathrm{Ln}(1+x)}dx$ converge.

Au voisinage de 0, la fonction n'a pas un signe constant. Montrons que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\mathrm{Ln}(1+x)}dx$ est absolument convergente. On a $\dfrac{\sqrt{x} \mid \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \mid}{\mathrm{Ln}(1+x)} \leq \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$. Comme, au voisinage de 0, $\dfrac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$ est convergente, il en est de même de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x} \mid \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \mid}{\mathrm{Ln}(1+x)}dx$ (théorème de comparaison pour des fonctions positives).

En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\mathrm{Ln}(1+x)}dx$ converge

Exercice 5 : Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$. On a $S_n \leq 2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Donc $\sum U_n$ converge.