DM 1 — à rendre le ? ? ?

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Dans chaque exercice, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes. Vous êtes invités à encadrer les résultats de vos calculs.

Exercice 1 : On considère la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 6\sqrt{u_n}$.
1) Montrez que u_n est strictement croissante, et déterminez sa limite.
2) On pose $v_n = \sqrt{u_n}$. A l'aide d'un développement limité, montrez que la suite $(v_{n+1} - v_n)$ converge, et déterminez sa limite.
3) A l'aide du théorème de Césaro, montrez que $v_n \sim 3n$.
4) En déduire un équivalent de (u_n).

Exercice 2 : Étudiez la convergence des *séries* dont voici le terme général, défini pour $n \geq 2$.

(a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n + (-1)^n)}$ (b) $v_n = e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ (c) $w_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ (d) $t_n = f\left(\dfrac{1}{n}\right)$

où $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^3, telle que $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 4$.

Exercice 3 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs. Nous dirons que le produit infini $\prod_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si la suite $(P_N)_{N\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$P_N := \prod_{n=0}^{N} u_n \qquad \text{pour tout } N \in \mathbb{N}$$

converge vers une limite finie *et non nulle*.
1) Montrez que, pour que le produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, il est nécessaire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
2) Montrez que $\prod_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln u_n$ converge.
3) Montrez que $\prod_{n\in\mathbb{N}}(1 + u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
4) En utilisant les résultats des questions précédentes, montrez que $\sum_{n\geq 1} 1/n$ diverge.
5) Supposons maintenant que $u_n > -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en particulier, u_n peut prendre des valeurs négatives). Supposons aussi que les séries de terme général u_n et u_n^2 convergent. Montrez que $\prod_{n\in\mathbb{N}}(1+u_n)$ converge.
6) Le résultat du point précédent reste-t-il vrai si on suppose seulement que $u_n > -1$ pour tout n et que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge ?

Exercice 4 : On considère une fonction *bijective* $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$. Notre but est d'étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{\sigma(k)}{k^2}.$$

1) Montrez que pour tout $n \geq 1$

$$\text{Card}\,\{k \in \{n+1, .., 3n\} | \quad \sigma(k) \geq n\} \geq n.$$

2) En déduire que

$$\sum_{k=n+1}^{3n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{1}{9}.$$

3) En déduire que la suite $u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2}$ n'est pas une suite de Cauchy.
4) Quelle est la limite de (u_n) ?