DM 2 — à rendre avant le 31/10/14

Exercice 1

1) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^{-x^2}$ pour tout $x \geqslant 0$. Montrer que cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, \mathrm{d}x$.
   a) Calculer a_0 et a_1.
   b) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a $0 < a_{n+1} < a_n$.
   c) Pour $n \geqslant 2$, établir une relation liant a_n et a_{n-2}.
   d) Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a $n a_n a_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.
   e) Pour $n \geqslant 1$, déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$. *(On pensera à utiliser le fait que $a_{n+1} < a_n < a_{n-1}$)*
   f) À l'aide des résultats précédents, déterminer la limite de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et donner un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3) Pour $x \in]-1, +\infty[$, on pose $h(x) = x - \ln(1 + x)$. Étudier les variations de h sur $]-1, +\infty[$. Quelle inégalité peut-on en déduire ?

4) Soit $n \geqslant 1$.
   a) Montrer que l'application $x \longmapsto \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. *(On pourra effectuer le changement de variable $x = \sqrt{n} \tan t$).*
   b) On pose :

$$b_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad c_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x.$$

   Montrer que :

$$b_n \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x \leqslant c_n.$$

   c) À l'aide de changements de variables judicieux, exprimer b_n et c_n à l'aide des intégrales a_{2n+1} et a_{2n-2}. (*On pourra avoir besoin de la formule* $\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$, qui est valable pour $t \in]-\pi/2, \pi/2[$)

5) À l'aide des questions précédentes, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$.

Exercice 2

1) On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx.$$

   a) Montrez que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{|\sin(t + n\pi)|}{t + n\pi} dt$. En déduire que $u_n \geqslant \dfrac{2}{(n+1)\pi}$.
   b) Montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x} dx$ diverge.
   c) Montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge. (On pourra effectuer une intégration par partie).

2) On définit les suites (J_n) et (K_n) par

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} dx, \quad K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} dx.$$

   a) Montrez (par récurrence) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \dfrac{\pi}{2}$.
   b) Montrez qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in]0, \dfrac{\pi}{2}]$, $\left|\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}\right| \leqslant M$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} (J_n - K_n) = 0$.
   c) À l'aide des questions précédentes, montrez que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\pi}{2}.$$