UPMC — 2M460 - Séries de fonctions et séries entières — 2014-2015

DM 3 — à rendre avant le 17/11/2014

On cherche à étudier la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivante : $d_n = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 / 2n_1 + 3n_2 = n\}$. On pose pour ce faire la fonction $f(z) = \frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)}$.

1) Montrer que f est DSE sur U, le disque ouvert centré en 0 et de rayon 1.

2) On rappelle la formule de Cauchy : si $\sum_n^\infty a_n$ et $\sum_n^\infty b_n$ sont deux séries absolument convergentes alors

$$\left(\sum_n^\infty a_n\right) \times \left(\sum_n^\infty b_n\right) = \sum_n^\infty \left(\sum_{0\leq k\leq n} a_k b_{n-k}\right).$$

Montrer que $f(z) = \sum_n^\infty \left(\sum_{0\leq k\leq n} z^{2k+3(n-k)}\right)$.

3) En déduire que $f(z) = \sum_n^\infty d_n z^n$

4) Donner le développement en série entière de $\frac{1}{(z-1)^2}$ (Indication : il s'agit de la dérivée d'une fonction dont on connaît le développement).

5) Nous voulons donner une nouvelle écriture de cette fonction afin d'obtenir une formule exacte pour la suite (d_n). Décomposer f en éléments simples.

$$f(z) = \frac{-3z+5}{12(z-1)^2} + \frac{1}{4(z+1)} + \frac{1}{3i(z-j)} - \frac{1}{3i(z-j^2)}.$$

6) Donner un développement en série entière explicite de f.

7) En déduire la valeur de d_n.

UPMC — 2M460 - Séries de fonctions et séries entières — 2014-2015

DM 3 — à rendre avant le 17/11/2014

On cherche à étudier la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivante : $d_n = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 / 2n_1 + 3n_2 = n\}$. On pose pour ce faire la fonction $f(z) = \frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)}$.

1) Montrer que f est DSE sur U, le disque ouvert centré en 0 et de rayon 1.

2) On rappelle la formule de Cauchy : si $\sum_n^\infty a_n$ et $\sum_n^\infty b_n$ sont deux séries absolument convergentes alors

$$\left(\sum_n^\infty a_n\right) \times \left(\sum_n^\infty b_n\right) = \sum_n^\infty \left(\sum_{0\leq k\leq n} a_k b_{n-k}\right).$$

Montrer que $f(z) = \sum_n^\infty \left(\sum_{0\leq k\leq n} z^{2k+3(n-k)}\right)$.

3) En déduire que $f(z) = \sum_n^\infty d_n z^n$

4) Donner le développement en série entière de $\frac{1}{(z-1)^2}$ (Indication : il s'agit de la dérivée d'une fonction dont on connaît le développement).

5) Nous voulons donner une nouvelle écriture de cette fonction afin d'obtenir une formule exacte pour la suite (d_n). Décomposer f en éléments simples.

6) Donner un développement en série entière explicite de f.

7) En déduire la valeur de d_n.