Feuille de TD 1 de Surfaces de Riemann.
Exemples élémentaires, morphismes et fonctions méromorphes.

Un *morphisme* $f : X \to Y$ entre surfaces de Riemann (non nécéssairement connexes) désignera une application $f : X \to Y$ qui est *holomorphe.*

Exercice 1 (La sphère de Riemann)**.** Soit $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, la sphère unité[1] de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. On note $N = (0, 0, 1)$ et $S = (0, 0, -1)$, les "pôles Nord et Sud" de S^2. On identifie $\mathbb{R}^2$ avec le plan $z = 0$. Soit $p_N : S^2 - \{N\} \to \mathbb{R}^2$ l'application, appelée projection stéréographique (de pôle nord), qui associe à un point $m \in S^2 - N$ le point d'intersection de $\mathbb{R}^2$ avec la demi droite issue de N et passant par m. De même, on note $p_S : S^2 - \{S\} \to \mathbb{R}^2$, la projection stéréographique de pôle sud.

1. Montrer que p_N et p_S sont des homéomorphismes. Décrire géométriquement la composée $p_S \circ {p_N}^{-1} : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$.
2. En déduire que S^2 peut être muni d'une structure de surface de Riemann.
3. Que deviennent un cercle, une droite de $\mathbb{R}^2$ après application de ${p_N}^{-1}$?
4. Montrer que p_N préserve les angles, mais pas les distances.
5. Montrer que $d(m, n) = arcos(\langle m, n\rangle)$ définit une distance sur S^2 (muni de sa topologie).

Exercice 2 (Espaces Projectifs complexes)**.** On note $\mathbb{C}P^1 = (\mathbb{C}^2 - \{0\})/\mathbb{C}^*$ l'espace des droites complexes de $\mathbb{C}P^2$ muni de la topologie quotient.

1. Montrer que $\mathbb{C}P^1$ est une surface de Riemann compacte et connexe.
2. Montrer que $\mathbb{C}P^1$ est isomorphe à S^2 en tant que surface de Riemann. Vérifier également que $\mathbb{C}P^1$ s'identifie à $\widehat{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ avec la structure de surface de Riemann donnée dans l'Exemple 1.3 du cours, c'est à dire munie des cartes $z_1 : \widehat{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$, $z_1(z) = 1/z$ et $z_2 : \widehat{C} - \{\infty\} \to \mathbb{C}$, $z_2(z) = z$.

Exercice 3 (Fonctions holomorphes et méromorphes)**.**

1. Montrer que toute fonction holomorphe sur une surface de Riemann *connexe* et *compacte* est constante.
2. Montrer que toute fonction méromorphe sur une surface de Riemann X peut être vue comme un morphisme (c'est à dire une application holomorphe) $f : X \to \mathbb{C}P^1$.
3. Montrer que les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}P^1$ sont les fonctions rationnelles.

Exercice 4 (Morphismes entre surfaces de Riemann)**.** Soit $f : X \to Y$ un morphisme non-constant entre surfaces de Riemann *connexes.*

1. Montrer que f est ouverte.
2. Montrer que f est discrète (c'est à dire que, pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(\{y\})$ est discret).
3. Si f est injective, montrer que f est un isomorphisme (de surfaces de Riemann) de X sur $f(X)$.

[1] dîte de Riemann lorsqu'on la munit de "sa" structure complexe

4. On dit que f est ramifié en un point $x \in X$ s'il n'existe aucun voisinage V_x de x tel que $f_{|V_x}$ soit injective. Montrer que f est non ramifié si et seulement si f est un homéomorphisme local. Donner des exemples de morphismes ramifiés et non-ramifiés.

5. On suppose que X est compacte. Montrer que f est surjective. En prenant $X = \mathbb{C}P^1 = Y$, en déduire le théorème fondamental de l'algèbre.

6. Où peut-on supprimer les hypothèses de connexité dans les questions précédentes ?

Exercice 5 (Automorphismes de D, H, $\mathbb{C}P^1$)**.** On note $D = B(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < 1\}$ le disque unité et $H = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{im}(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré.

1. Montrer que D et H sont des surfaces de Riemann. Sont-elles compactes ?

2. Montrer que D est homéomorphe à $\mathbb{C}$ mais n'est *pas* isomorphe à $\mathbb{C}$ (en tant que surface de Riemann). Montrer que D est isomorphe à H via une homographie que l'on explicitera.

3. Identifier le groupe $Aut(\mathbb{C})$ des automorphismes de $\mathbb{C}$. Agit-il transitivement sur $\mathbb{C}$?

4. Montrer que le groupe $Aut(\mathbb{C}P^1)$ des isomorphismes de $\mathbb{C}P^1$ est le groupe des homograhies[2] et qu'il agit transitivement sur $\mathbb{C}P^1$.

5. Identifier les groupe $Aut(D)$ des automorphismes de D et $Aut(H)$ des automorphismes de H.

Exercice 6 (Courbes lisses)**.** Soit $P \in \mathbb{C}[z,w]$, un polynôme complexe à deux variables. Soit $S = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 / P(z,w) = 0\}$, le lieu d'annulation de P. On admettra le théorème des fonctions implicites sous sa forme complexe:

Si $(z_0, w_0) \in S$ et $\dfrac{\partial P}{\partial w}(z_0, w_0)$ non nul, alors il existe U un voisinage ouvert de (z_0, w_0) dans $\mathbb{C}^2$ et g holomorphe tels que $U \cap X = \{(z, g(z))\} \cap U$, de plus $g'(z) = \dfrac{\partial P}{\partial z} \Big/ \dfrac{\partial P}{\partial w}$.

On parlera de courbe (affine) lisse si pour tout point de P, l'une des deux dérivées partielles est non-nulle.

1. Montrer qu'une courbe lisse est un surface de Riemann pour une structure complexe à définir.

2. Montrer que la projection sur chacune des variables fournit deux fonctions holomorphes (en déduire que S est non-compacte).

3. Soit $\mathbb{C}P^2 = \mathbb{C}^{3*}/\mathbb{C}^*$. Un polynôme P à trois variables sera dit homogène si il existe un entier n (le degré) tel que pour tout (x,y,z) de $\mathbb{C}^3$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on a $P(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n P(x,y,z)$. Montrer que l'ensemble des zéros de P définit bien un sous-ensemble S de $\mathbb{C}P^2$.

4. On dit que P est lisse si il n'y a pas de solutions communes à:
$$P = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0.$$
Montrer qu'alors S est une surface de Riemann compacte.

5. Montrer que $\mathbb{C}P^2$ est recouvert par trois ouverts isomorphes à $\mathbb{C}^2$ définis par $U_x = \{[x,y,z]/x \neq 0\}$ (idem pour y et z). Montrer que S n'est contenue dans aucun de ces ouverts.

6. Montrer que la fonction $\pi : \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}$ qui à $[x,y,z]$ associe x/y est bien définie et fournit une fonction méromorphe sur S.

7. A l'aide de la formule de Riemann Hurwitz en déduire une relation entre le degré et le genre des courbes projective lisse.

8. Calculer le genre de la courbe elliptique $y^2 = x^3 + ax + b$ (avec $\Delta = 4a^3 + 27b^2$ non nul).

[2] dit aussi groupe de Möbius