Et quelques surfaces de plus: les quotients.

Exercice 1 (Constructions de surfaces de Riemann à partir d'une autre)**.** Soit X une surface de Riemann.

1. Soit Γ est un groupe (discret) qui agit analytiquement sur X, librement et proprement. Montrer que le quotient X/Γ a une structure naturelle de surface de Riemann telle que la projection $X \to X/\Gamma$ soit un morphisme.

2. Soit $\tilde{X}$ un espace topologique séparé et $f : \tilde{X} \to X$ un homéomorphisme local. Montrer qu'il existe une *unique*[1] structure de surface de Riemann sur $\tilde{X}$ qui fasse de f un *morphisme.*

Exercice 2. Soit K un compact inclus dans $\mathbb{C}$ et f une fonction méromorphe sur un voisinage de K.

1. Si f n'a ni pôle ni zéro sur ∂K, alors
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K}\frac{f'(z)}{f(z)} = Z(f) - P(f)$$
où $Z(f)$ est le nombre de zéros et $P(f)$ le nombre de pôles de f comptés avec multiplicités.

2. Soit X une surface de Riemann et g une fonction holomorphe sur X. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ un complexe et $x_0 \in X$ une racine d'ordre k de l'équation $g(x_0) = z_0$. Déduire de **1)** qu'il existe un voisinage V_x de x dans X et un voisinage V_z de z, tels que l'équation $g(x) = z$ a exactement k solutions simples dans V_x pour $z \in V_z$.

3. On suppose que f est définie sur $\mathbb{C}$ et a pour période un réseau $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ (autrement dit, f est méromorphe sur la courbe elliptique $T_{(e_1,e_2)}$). On note P le domaine fondamental de Γ. Montrer que $\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial P}\frac{zf'(z)}{f(z)-a} = \sum a_i - \sum b_j$ où a_i sont les solutions de $f(z) = a$ dans P et les b_j sont les pôles de f dans P (comptés avec multiplicité).

Exercice 3 (Surface de Riemann du logarithme)**.** Soit D un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}^*$.

1. Rappeler pourquoi l'intégrale $\int_1^v \frac{dt}{t}$ définit une fonction holomorphe sur D mais pas sur $\mathbb{C}^*$.

2. Montrer que l'intégrale $\int_1^v \frac{dt}{t}$ induit un morphisme de surfaces de Riemann noté $\widetilde{\log} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$ (où $2i\pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ est un réseau de dimension 1).

3. Montrer que la fonction exponentielle induit un isomorphisme $\exp : \mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ qui est l'inverse de $\widetilde{\log}$.

Exercice 4 (Structures complexes sur un tore : courbes elliptiques)**.** Soit $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ un réseau de $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire que $e_1/e_2 \notin \mathbb{R}$). On considère le tore $T_{(e_1,e_2)} := \mathbb{C}/\Gamma$.

1. Montrer que $T_{(e_1,e_2)}$ a une structure de surface de Riemann telle que $p : \mathbb{C} \to T_{(e_1,e_2)}$ est un morphisme ; exhiber un atlas de $T_{(e_1,e_2)}$.

2. Montrer que $T_{(e_1,e_2)}$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{C}$ ou D et qu'il existe $\tau \in H$ tel que $T_{(e_1,e_2)}$ est isomorphe à $T_{(1,\tau)}$.

[1] à isomorphisme de surfaces de Riemann près

3. Montrer que $T_{(1,\tau)}$ est *homéomorphe* à $T_{(1,\nu)}$ et qu'ils sont *isomorphes* si et seulement si $\nu = \dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$ avec $ad-bc=1$ et $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$.
4. Montrer que les fonctions méromorphes sur $T_{(e_1,e_2)}$ sont les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ de période e_1 et e_2.

Exercice 5 (Revêtements universels)**.** Soit $D := \{z\in\mathbb{C} \,/\, |z|<1\}$ le disque unité et $D^* = D-\{0\} = \{z\in\mathbb{C}^* \,/\, |z|<1\}$ le disque épointé.

1. Quel est le groupe fondamental de D^* ?
2. Montrer que H (le demi-plan supérieur) est le revêtement universel de D^*.
3. Quel sont les revêtements de D^* ? Lesquels sont réguliers ?
4. Montrer que tout revêtement fini de D^* est de la forme $D^*\to D^*$, $z\mapsto z^n$.
5. Montrer que D est le revêtement universel de $\mathbb{C}-\{0,1\}$.
6. En déduire que si $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ est une fonction holomorphe qui évite deux points, alors f est constante.

Exercice 6. On considère la fonction $\sin:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ (rappel: $\sin(x) = \dfrac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2i}$).

1. Montrer que sin est un revêtement holomorphe ramifié. Quels sont ses points de ramification ? Ses fibres en un point z ? En déduire que la restriction $\sin:\mathbb{C}-(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})\to\mathbb{C}-\{-1,1\}$ est un revêtement holomorphe non-ramifié.
2. Quel est le groupe fondamental de $\mathbb{C}-\{-1,1\}$? Celui de $\mathbb{C}-(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})$?
3. Soit $\alpha:[0,1]\to\mathbb{C}-\{-1,1\}$ et $\beta:[0,1]\to\mathbb{C}-\{-1,1\}$ les lacets définis par
$$\alpha(t) = 1-\exp(2i\pi t), \qquad \beta(t) = -1+\exp(2i\pi t).$$
Soit $f:[0,1]\to\mathbb{C}-(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})$ le relévement du lacet composé $\alpha\cdot\beta$ vérifiant $f(0)=0$ et $g:[0,1]\to\mathbb{C}-(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})$ le relévement du lacet composé $\beta\cdot\alpha$ vérifiant $g(0)=0$. Calculer $g(1)$ et $f(1)$.
4. Dterminer le groupe des transformations du revêtement $\sin:\mathbb{C}-(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})\to\mathbb{C}-\{-1,1\}$? Est-ce un revêtement régulier ?

Exercice 7. Soit H le demi-plan supérieur et G un sous-groupe de $Aut(H)$ tel que H/G soit une surface de Riemann compacte couverte par H.

1) Quel est le revêtement universel de H/G ? Quel est son groupe fondamental ?
2) Montrer que tout élément $g\in G$ différent de 1 a deux points fixes, qui sont situés sur l'axe réel (on dit qu'un tel g est hyperbolique). Caractériser cette propriété en terme de la trace d'une matrice représentant g.
3) On suppose que le genre de H/G est $g>1$. Montrer que tout sous-groupe abélien non-trivial de G est cyclique d'ordre infini.