Tores et courbes elliptiques (en fait c'est la même chose!)

L'objectif de cette suite d'exercice est de présenter l'ensemble des aspects des courbes elliptiques. Notamment on va montrer l'equivalence de ces trois définitions d'une courbe elliptique:

1. Le plan $\mathbb{C}$ quotienté par un réseau $\Lambda_{e_1,e_2} = e_1\mathbb{Z} \oplus e_2\mathbb{Z}$ (avec (e_1, e_2) une base réelle de $\mathbb{C}$);
2. Une courbe projective lisse de degré 3 avec un point marqué;
3. Une surface de Riemann compacte munie d'une structure de groupe commutatif (le point marqué ici sera le 0) compatible avec la structure complexe, i.e.:

$$g \mapsto g^{-1}, \quad g \mapsto g_0 \cdot g$$

sont holomorphes (pour tout g_0).

Exercice 1 (Structures complexes sur un tore)**.** Soit $\Lambda = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ un réseau de $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire que $e_1/e_2 \notin \mathbb{R}$). On considère le tore $T_{(e_1,e_2)} := \mathbb{C}/\Lambda$.

1. Montrer que $T_{(e_1,e_2)}$ a une structure de surface de Riemann telle que $p : \mathbb{C} \to T_{(e_1,e_2)}$ est un morphisme ; exhiber un atlas de $T_{(e_1,e_2)}$.
2. Montrer que $T_{(e_1,e_2)}$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{C}$ ou D et qu'il existe $\tau \in H$ tel que $T_{(e_1,e_2)}$ est isomorphe à $T_{(1,\tau)}$.
3. Montrer que $T_{(1,\tau)}$ est *homéomorphe* à $T_{(1,\nu)}$ et qu'ils sont *isomorphes* si et seulement si $\nu = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$ avec $ad - bc = 1$ et $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2 (Fonctions sur le tore)**.** Soit $T_{(e_1,e_2)} = \mathbb{C}/\Lambda$ comme ci-dessus.

1. Montrer que les fonctions méromorphes sur $T_{(e_1,e_2)}$ sont les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ de période e_1 et e_2.
2. Montrer que les fonctions de la forme

$$f_k = \frac{1}{z^k} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left(\frac{1}{(z+\omega)^k} + \frac{1}{\omega^k} \right) \text{ et } g_k = \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z+\omega)^k}$$

sont méromorphes sur $\mathbb{C}$ avec des pole d'ordre k en les points du réseau (définies pour $k \geq 2$ pour f_k et $k \geq 3$ pour g_k).

3. Montrer que les fonctions f_k et g_k sont périodiques donc définissent des fonctions méromorphes sur $T_{(e_1,e_2)}$ avec un unique pôle en 0.
4. montrer que l'algèbre engendrée par les f_k et les g_k est engendrée par f_2 et g_3 et que $g_3 = f_2'$. On utilisera désormais la notation $\wp(z) = f_2$. Montrer que $\wp'$ et $\wp$ sont liées par un équation algébrique de degré 3.
5. Soit f méromorphe sur $\mathbb{C}$ et périodique. Soit K un domaine fondamental pour $T_{(e_1,e_2)}$ dans $\mathbb{C}$ tel que ∂K ne rencontre pas les pôles et zéros de f. Montrer que $\displaystyle\int_{\partial K} \frac{f'}{f}$ est la somme des ordres des zéros moins celle des ordres des pôles de f dans l'intérieur de K. Montrer que $\displaystyle\int_{\partial K} z\frac{f'}{f}$ est la somme des zéros moins celle des pôles.

6. En déduire que pour toute fonction méromorphe sur $T_{(e_1,e_2)}$, la somme des ordres des pôles et celle des zéros sont égales et que la somme des pôles moins la somme des zéros est nulle (pour l'addition dans le groupe quotient).

7. Montrer que le corps des fonctions méromorphes de $T_{(e_1,e_2)}$ est isomorphe à

$$\mathbb{C}(\wp, \wp')/\left(\wp'^2 = 4\wp^3 - 60G_4(\Lambda)\wp - 140G_6(\Lambda)\right),$$

où $G_{2k}(\Lambda) = \sum_{\omega\in\Lambda^*} \frac{1}{\omega^k}$.

Exercice 3 (Groupe de Picard)**.** Pour une surface de Riemann X, un diviseur est un élément de $\bigoplus_{x\in X} \mathbb{Z}[x]$ (sommes formelles déléments de X). A toute fonction méromorphes f sur X on associe le diviseur $(f) = \sum ord_x(f).(x)$. On note $Div(X)$ l'ensemble des diviseurs et $Pr(X)$ le sous-groupe des diviseurs principaux de X, i.e. le sous-groupe engendré par les diviseurs de la forme (f), pour une fonction f

1. Montrer que le morphisme $deg : Div(X) \to \mathbb{Z}$ qui a un diviseur associe la somme des coefficients est un morphisme de groupe.

2. Montrer que $Pr(X) \subset Div^0(X) = Ker(deg)$.

3. Montrer que si X est un tore comme ci-dessus, alors $Pic^0(X) = Div^0(X)/Pr(X) \simeq X$ (en tant que groupe).

4. On dit que D est effectif si tous ses coefficients sont positifs. On note $\mathcal{L}(D)$ l'espace des fonctions f telles que $(f) + D$ est effectif. Montrer que $\mathcal{L}(D)$ est un espace vectoriel.

5. Sur le tore $T_{(e_1,e_2)}$, montrer que $dim(L(kP)) = k$ si $k \geq 1$ (où P est le point origine). Plus généralement, si D est de degré strictement positif, montrer que $dim(L(D)) = deg(D)$.

Exercice 4 (courbe elliptique lisse)**.**

1. En utilisant les fonction $\wp$ et $\wp'$, montrer que tout tore peut se plonger comme un cubique lisse de $\mathbb{C}P^2$.

2. Réciproquement, en utilisant Riemann-Hurwitz, montrer que le genre d'une courbe projective lisse de degré 3 est 1.

3. (question difficile) Donner la loi de groupe sur une cubique lisse.

Exercice 5 (formes sur l'espace des réseaux)**.** On pose $G_{2k}(\Lambda) = \sum_{w\in\Lambda^*} 1/\omega^k$. On pose notera $G_{2k}(\tau) =$ $\mathrm{G}_2k(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})$

1. Montrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par $\tau \mapsto \tau + 1$ et $\tau \mapsto -1/\tau$.

2. Montrer que $G_{2k}(\tau) = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}^2-\{0,0\}} \frac{1}{(n + m\tau)^k}$. Montrer que pour $\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ dans $SL_2(\mathbb{Z})$, $G_{2k}(\gamma\tau) = (c\tau + d)^{2k} G_{2k}(\tau)$ (c'est une forme modulaire de poids 2k).