Mémo : Interversion suite-série / Intégrale

Interversion suite / Intégrale

Soit I un intervalle. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : I \to \mathbb{R}$ une suite de fonction sur I. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ la limite simple de f_n. Pour calculer l'intégrale de f, on dispose de *2 théorèmes* :

1. **(Sous convergence uniforme)**
   Hypothèses :
   (a) I est borné.
   (b) f_n converge uniformément vers f.
   (c) pour tout n, f_n est intégrable.
   Alors :
   (a) f est intégrable.
   (b) On a
   $$\int_I f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)dt.$$
   .
2. **(Théorème de convergence dominée)**
   Hypothèses :
   (a) f_n converge simplement vers f.
   (b) pour tout n, f_n est intégrable.
   (c) (domination) il existe $g : I \to \mathbb{R}^+$, intégrable telle que : pour tout x dans I et tout n dans $\mathbb{N}$:
   $$|f_n(t)| < g(t).$$
   Alors :
   (a) f est intégrable.
   (b) On a
   $$\int_I f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)dt.$$
   .

Interversion série / Intégrale

Soit I un intervalle. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} : I \to \mathbb{R}$ une suite de fonction sur I. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ la limite simple de la série $\sum_k f_k$. Pour calculer l'intégrale de f, on dispose encore de *2 théorèmes* :

1. **(Sous convergence uniforme)** inchangé par rapport aux suites.

2. **(TCD séries)**
   Hypothèses :
   (a) $\sum_k f_k$ converge simplement vers f.
   (b) pour tout k, f_k est intégrable.
   (c) la série numérique
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_I |f(t)| dt$$
   converge

   Alors :
   (a) f est intégrable.
   (b) On a
   $$\int_I f(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(t)dt.$$
   .

Exercices classiques

Exercice 1. *Calculer la limite quand n tend vers l'infini des suites*

1. $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)dx$.
2. $v_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n+e^x}$
3. $w_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{n+2}+1}dx$.

Exercice 2. *Montrer que*

1. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^k}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$, *pour tout k entier positif.*
2. $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Exercice 3. 1. *Calculer $\int_0^1 x^n \ln(x)^n dx$ pour tout n positif.*

2. *en déduire que $\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.*