Mémo : suites/séries de fonctions

Modes de convergence - suite

Soit I un intervalle (ouvert ou fermé). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : I \to \mathbb{R}$, un suite de fonctions réelles. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On peut dire que f_n converge vers f selon **3 modes différents** :

1. **Convergence simple** : $\forall x \in I,\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
2. **Convergence uniforme** $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in I$, $\forall n > N$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.
3. **Convergence uniforme sur tout compact** Pour tout couple (a, b) d'éléments de I avec $a < b$. f_n converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Ces modes de convergence sont hiérarchisés :

$$\textbf{CU} \Longrightarrow \textbf{CUST} \Longrightarrow \textbf{CS}.$$

Modes de convergence - Séries

Soit I un intervalle (ouvert ou fermé). Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} : I \to \mathbb{R}$, un suite de fonctions réelles. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$\begin{array}{rcl} U_n : I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x), \end{array}$$

c'est une suite de fonctions sur I. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On peut dire que la série $\sum f_k$ converge vers f selon *3+2 modes différents* :

1. **Convergence simple**, **Convergence uniforme** et **Convergence uniforme sur tout compact** si U_n converge simplement (uniformément, uniformément sur tout compact) vers f.
2. **Convergence normale** : $\forall k \in \mathbb{N}, \exists \epsilon_k > 0$ tels que pour tout $x \in I$, $|f_k(x)| < \epsilon_k$ et
$$\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k \text{ converge},$$
(et U_n converge simplement vers f).
3. **Convergence normale sur tout compact** : Pour tout couple (a, b) d'éléments de I avec $a < b$. f_n converge normalement vers f sur $[a, b]$.

Ces modes de convergence sont hiérarchisés :

$$\begin{array}{ccccc}
\textbf{CN} & \Longrightarrow & \textbf{CNST} & & \\
\Big\Downarrow & & \Big\Downarrow & & \\
\textbf{CU} & \Longrightarrow & \textbf{CUST} & \Longrightarrow & \textbf{CS}.
\end{array}$$

Propriétés sous convergence uniforme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : I \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions sur un intervalle I telle que f_n converge uniformément vers I, alors :

1. **(Continuité)** Si f_n continue pour tout n alors f est continue.
2. **(Dérivation)** Si f_n est dérivable et la suite de fonction $f'(n)$ converge uniformément vers une fonction $\tilde{f}$ alors : (1) f est dérivable et (2) $f' = \tilde{f}$.
3. **(Limite)** Si $I =]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$ alors
$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} f(x).$$
4. **(Intégration)** Si I est borné et les f_n sont intégrables, alors f est intégrable et
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x) = \int_a^b f(x)$$

Exercices classiques

Exercice 1. *Pour chacune des suites de fonctions suivantes, déterminer le mode de convergence.*

1. $f_n(x) = t^n$ *sur* $I = [0, 1]$.
2. $f_n(x) = e^{-nt}$ *sur* $I = [0, 1]$.

Exercice 2. *Pour chacune des séries de fonctions suivantes, déterminer le mode de convergence*

1. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, *sur* $I = [0, 1[$.
2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, *sur* $I = [0, 1]$ *(et* $I = [0, +\infty[$*).*
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x}$, *sur* $I =]0, +\infty[$.
4. $\sum_{k=1}^{\infty} x^k(1 - x^k)$, *sur* $I = [0, 1]$.

Exercice 3. *On pose* $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x}$ *sur* $I =]0, +\infty[$, *montrer que*

1. *S est bien définie et continue sur I*
2. *S est dérivable sur I.*