

Mémo : suites/séries de fonctions

Modes de convergence - suite

Soit I un intervalle (ouvert ou fermé). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : I \rightarrow \mathbb{R}$, une suite de fonctions réelles. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On peut dire que f_n converge vers f selon **3 modes différents** :

1. **Convergence simple** : $\forall x \in I, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.
2. **Convergence uniforme** $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in I, \forall n > N, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.
3. **Convergence uniforme sur tout compact** Pour tout couple (a, b) d'éléments de I avec $a < b$. f_n converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Ces modes de convergence sont hiérarchisés :

$$\text{CU} \implies \text{CUST} \implies \text{CS}.$$

Modes de convergence - Séries

Soit I un intervalle (ouvert ou fermé). Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} : I \rightarrow \mathbb{R}$, une suite de fonctions réelles. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$U_n : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{k=0}^n f_k(x),$$

c'est une suite de fonctions sur I . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On peut dire que la série $\sum f_k$ converge vers f selon **3+2 modes différents** :

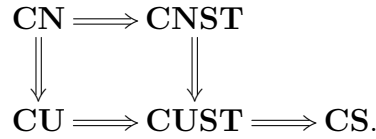
1. **Convergence simple, Convergence uniforme et Convergence uniforme sur tout compact** si U_n converge simplement (uniformément, uniformément sur tout compact) vers f .
2. **Convergence normale** : $\forall k \in \mathbb{N}, \exists \epsilon_k > 0$ tels que pour tout $x \in I, |f_k(x)| < \epsilon_k$ et

$$\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k \text{ converge,}$$

(et U_n converge simplement vers f).

3. **Convergence normale sur tout compact** : Pour tout couple (a, b) d'éléments de I avec $a < b$. f_n converge normalement vers f sur $[a, b]$.

Ces modes de convergence sont hiérarchisés :



Propriétés sous convergence uniforme

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : I \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions sur un intervalle I telle que f_n converge uniformément vers f , alors :

1. **(Continuité)** Si f_n continue pour tout n alors f est continue.
2. **(Dérivation)** Si f_n est dérivable et la suite de fonction f'_n converge uniformément vers une fonction \tilde{f} alors : (1) f est dérivable et (2) $f' = \tilde{f}$.
3. **(Limite)** Si $I =]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

4. **(Intégration)** Si I est borné et les f_n sont intégrables, alors f est intégrable et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) = \int_a^b f(x)$$

Exercices classiques

Exercice 1. Pour chacune des suites de fonctions suivantes, déterminer le mode de convergence.

1. $f_n(x) = t^n$ sur $I = [0, 1]$.
2. $f_n(x) = e^{-nt}$ sur $I = [0, 1]$.

Exercice 2. Pour chacune des séries de fonctions suivantes, déterminer le mode de convergence

1. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, sur $I = [0, 1[$.
2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, sur $I = [0, 1]$ (et $I = [0, +\infty[$).
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x}$, sur $I =]0, +\infty[$.
4. $\sum_{k=1}^{\infty} x^k(1 - x^k)$, sur $I = [0, 1]$.

Exercice 3. On pose $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x}$ sur $I =]0, +\infty[$, montrer que

1. S est bien définie et continue sur I
2. S est dérivable sur I .