Fonction Γ.

On pose
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\exp(-t)dt.$$
Pour étudier cette intégrale à paramètre on pose :
$$\begin{array}{rcl} h :]0,+\infty[\times]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & t^{x-1}\exp(-t). \end{array}$$

Question 1. Montrer que $\Gamma(x)$ est bien définie pour tout $x \in]0,+\infty[$.

Question 2. Montrer que Γ est continue sur $]0,+\infty[$.

Question 3. (a) Montrer que Γ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que
$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1}\exp(-t)dt.$$
(b) Montrer que Γ est dérivable deux fois sur $]0,+\infty[$ et que
$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 t^{x-1}\exp(-t)dt.$$

En déduire que Γ' est une fonction strictement croissante.

Question 4. (a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$.
(b) Montrer que $\Gamma(1) = 1$ et que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(c) Utiliser l'égalité de 4.a pour montrer que $\lim_{x\to 0}\Gamma(x) = +\infty$.

Question 5. (a) Montrer qu'il existe $x_0 \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(x_0) = 0$. En déduire que $\lim_{x\to+\infty}\Gamma(x) = +\infty$.
(b) Dresser le tableau de variation et des limites de la fonction Γ.