2M460 — Année 2014-2015

Partiel du 30 octobre 2014

Durée 2 heures

Les appareils électroniques et documents sont interdits. La qualité de la rédaction sera prise en compte. Les réponses injustifiées ne le seront pas. L'énoncé comporte deux pages. N'oubliez pas de tourner la page.

Exercice 1 : Etudier la nature des séries $\sum_{n\geq 2} U_n$ dans les cas suivants :

1. $U_n = \text{Ln}\left(n \sin(\frac{1}{n})\right)$.
2. $U_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$
3. $U_n = \text{Ln}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + \alpha \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2: 1. Montrer que la fonction $t \to \dfrac{Ln(t)}{t}$ est décroissante sur $[3, +\infty[$. On admet que $3 > e$.

2. Etudier la convergence des séries $\sum_{n\geq 3} \dfrac{(-1)^n \text{Ln}(n)}{n}$ et $\sum_{n\geq 3} \dfrac{\text{Ln}(n)}{n}$.

3. Soit $s_N = \sum_{n=3}^{N} \dfrac{\text{Ln}n}{n}$ la somme partielle d'ordre N de la série $\sum_{n\geq 3} \dfrac{\text{Ln}(n)}{n}$. Encadrer s_N par deux intégrales. En déduire un équivalent simple de la suite (s_N) lorsque N tend vers $+\infty$.

Exercice 3 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$. On définit la fonction F par

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt.$$

1. Donner le domaine de définition de F.
2. Préciser la ou les valeurs où F s'annule ainsi que le signe de $F(x)$.
3. Montrer que F est dérivable sur son domaine de définition et calculer sa dérivée.
4. A l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, trouver une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : pour tout $x \neq 0$, on ait $F(x) = F \circ h(\dfrac{1}{x})$.
5. Donner un développement limité de F à l'ordre 1 au voisinage de 0.
6. En déduire un équivalent simple de F au voisinage de $+\infty$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} F(x)dx$ est-elle convergente?

Exercice 4 :

1) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \text{Ln}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$ est convergente et la calculer. On pourra faire une intégration par parties.

2) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\text{Ln}(1+x)}dx$ est-elle convergente?

Exercice 5 : Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 1} U_n$ la série de terme général U_n donné par

$$U_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si} \quad \text{n} \quad \text{est un carré} \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} U_n$ est-elle convergente?